

ZERO – JURNAL SAINS MATEMATIKA DAN TERAPAN  
 Volume 1 No. 2 2017  
 Page : 72-86  
 P-ISSN: 2580-569X  
 E-ISSN: 2580-5754

## RECOGNITION OF LOCAL CAPITAL USING SYMMETRIC TWO-DIMENSIONAL LINEAR DISCRIMINANT ANALYSIS

Rina Widyasari<sup>1</sup>, Ismail Husein<sup>2</sup>

Department of Mathematics

UINSU Medan

rina\_widyasari@uinsu.ac.id

**Abstract** Statistical pattern recognition is a system that aims to classify a number of objects to a number of categories or classes. Given a data matrix  $A$ ,  $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$  where  $\Pi_i$  consist of  $n_i$  point data of  $i$ th class then patterns in each classes can classify and separate distance of within and between-class in datasets. In this paper, Symmetric Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis proposed to maximize the between-class scatter matrices ( $S_b$ ) and minimize the within-class scatter matrices ( $S_w$ ), and can recognition the symmetric capital letter by hand writing such as A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, S, U, V, W and Y by using ADL2-D algorithm.

**Key Word:** Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris, Pengenalan Pola, Huruf Kapital Tulisan Tangan

**Abstrak** Pengenalan Pola secara Statistika (*Statistical Pattern Recognition*) merupakan suatu sistem yang bertujuan mengklasifikasi objek-objek ke dalam kategori-kategori atau kelas-kelas. Jika diberikan suatu matriks data  $A$ ,  $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ , dimana  $\Pi_i$  memuat  $n_i$  titik data dari kelas ke  $i$  maka pola-pola yang terdapat pada masing-masing kelas dapat diklasifikasi dan dapat dilihat jarak pemisahan antar kelas dan dalam kelas himpunan data tersebut. Pada penelitian ini digunakan Analisis Diskriminan Linier Dua-Dimensi Simetris sebagai metode pengklasifikasian yang tujuannya memaksimumkan jarak matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ) dan meminimumkan jarak matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ), dan dapat mengatasi masalah keraguan yang ditimbulkan pada matriks gambar yang tidak simetris ( $X_i \neq X_i^T$ ), dimana  $S_w$  dan  $S_b$  terdefinisi ganda. Penelitian ini ditujukan pada pengenalan pola huruf kapital simetris tulisan tangan seperti A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, S, U, V, W, dan Y dengan menggunakan algoritma ADL2-D Simetris yang akan menghasilkan klasifikasi yang akurat dan lebih efisien.

**Kata Kunci:** Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris, Pengenalan Pola, Huruf Kapital Tulisan Tangan

## 1. Pendahuluan

Pengenalan pola atau dikenal dengan sebutan *pattern recognition* merupakan salah satu cabang sains yang pada dasarnya adalah suatu sistem yang bertujuan mengklasifikasi objek-objek ke dalam kategori-kategori atau kelas-kelas (Theodoridis, 2003), berdasarkan baik pada *a priori* pengetahuan atau pada informasi statistik yang diambil dari pola. Proses pada sistem pengenalan pola dimulai dari pemilihan pola sebagai sensor, kemudian pola-pola tersebut masuk ke teknik pemrosesan, bagan representasi, dan terakhir adalah proses pemodelan pembuatan keputusan. Pendekatan terbaik yang digunakan untuk pengenalan pola pada penelitian ini ialah klasifikasi statistik.

Beragam algoritma dapat diterapkan untuk pengenalan pola. Salah satunya yaitu Analisis Diskriminan Linier yang selanjutnya disingkat penulis dengan ADL telah sukses diaplikasikan dalam visualisasi komputer. Sebagai suatu pendekatan analisis subruang untuk mempelajari struktur berdimensi rendah data berdimensi tinggi, ADL mencari suatu himpunan vektor-vektor yang memaksimumkan Criterion Fisher Discriminant. Metode ini secara simultan meminimumkan sebaran dalam kelas ( $S_w$ ) dan memaksimumkan sebaran antar kelas ( $S_b$ ) dalam proyeksi fitur ruang vektor.

Pada matriks 2-Dimensi seperti gambar, dan pada umumnya gambar bersifat tidak simetris  $X_i \neq X_i^T$ , maka matriks sebaran antar kelas maupun matriks sebaran dalam kelas didefinisikan tidak tunggal yakni

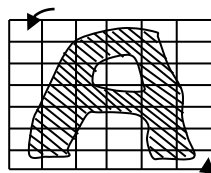
$$S_b(XX^T) \neq S_b(X^T X), \quad S_w(XX^T) \neq S_w(X^T X),$$

sehingga terdapat sejumlah pilihan-pilihan yang mungkin untuk menentukan fungsi objektif ADL yang tepat.

Pengenalan pola huruf kapital tulisan tangan adalah salah satu aplikasi dari analisis diskriminan linier 2-dimensi simetris. Penulisan huruf kapital dalam standar baku yang digunakan dalam proses pengenalan pola ini yaitu huruf A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, S, U, V, W dan Y.

### 2.1 Analisis Diskriminan Linier

Dalam proses klasifikasi, ukur terlebih dahulu karakteristik-karakteristik pengamatan dari sampel. Ekstraksi seluruh informasi yang terdapat dalam sampel untuk menghitung nilai sampel-waktu untuk suatu pola berbentuk kurva, dan tingkat kehitaman dari piksel untuk suatu figur, seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.1.



Gambar 2.1. Contoh pengukuran pola huruf

Jika diberikan suatu matriks data  $A \in R^{N \times n}$ , metode ADL klasik bertujuan menemukan suatu transformasi  $G \in R^{N \times l}$  yang memetakan setiap kolom  $a_i$  dari matriks  $A$ , untuk  $1 \leq i \leq n$ , dalam ruang dimensi  $N$  ke vektor  $\mathbf{b}_i$  dalam ruang dimensi  $l$ . Yakni  $G : a_i \in R^{N \times n} \rightarrow \mathbf{b}_i = G^T a_i \in R^l (l < N)$ . Dengan kata lain, ADL bertujuan menemukan suatu ruang vektor  $\mathcal{G}$  direntangkan oleh  $\{g_i\}_{i=1}^l$  di mana  $G = [g_1, g_2, \dots, g_l]$ , sehingga setiap  $a_i$  diproyeksikan ke  $\mathcal{G}$  oleh  $(g_1^T a_i, \dots, g_l^T a_i)^T \in R^l$  (Ye et al, 2004).

Asumsikan bahwa data asli dalam  $A$  dipartisi ke dalam  $k$  kelas sehingga  $A = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ , dimana  $\Pi_i$  memuat  $n_i$  titik data dari kelas ke  $i$ , dan  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . ADL klasik bertujuan untuk menemukan transformasi optimal  $G$  sehingga struktur kelas dari data ruang berdimensi tinggi yang asli diubah ke dalam ruang berdimensi rendah (Ye et al, 2004).

Dalam ADL, transformasi ke subruang yang berdimensi lebih rendah yaitu

$$y_i = G^T x_i \text{ (Luo et al, 2007)} \quad (1)$$

di mana  $G$  merupakan transformasi ke subruang. Sering juga dituliskan dengan  $(y_1, \dots, y_n) = G^T (x_1, \dots, x_n)$  atau  $Y = G^T X$ . Tujuan utama dari ADL adalah mencari nilai  $G$  sehingga kelas dapat lebih terpisah dalam ruang transformasi dan dengan mudah dapat dibedakan dari yang lainnya.

Dalam metode Analisis Diskriminan Linier, terdapat dua matriks sebaran yaitu matriks sebaran dalam-kelas disimbolkan dengan  $S_w$ , dan matriks sebaran antar-kelas disimbolkan dengan  $S_b$ , masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$$S_w = \sum_{i=1}^c \sum_{x_k \in \Pi_i} [x_k - m_i][x_k - m_i]^T \quad (2)$$

$$S_b = \sum_{i=1}^c n_i [m_i - m][m_i - m]^T \quad (3)$$

di mana  $n_i$  adalah jumlah sampel pada kelas  $x_i$ , dan  $m_i$  adalah image rata-rata dari kelas ke- $i$  dan  $m$  adalah rata-rata keseluruhan. Rumus rata-rata kelas dan rata-rata keseluruhan adalah sebagai berikut:

$$m_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in \Pi_i} x \text{ adalah mean (rata-rata) dari kelas ke-} i, \text{ dan } m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} x$$

adalah rata-rata keseluruhan (Fukunaga, 1990).

Optimisasi umum dalam Analisis Diskriminan Linier meliputi (Fukunaga, 1990):

$$\max_G J(G) = \text{tr} \frac{S_b(Y)}{S_w(Y)} = \text{tr} \frac{G^T S_b(X) G}{G^T S_w(X) G} \quad (6)$$

## 2.2. Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi

Perbedaan utama antara ADL klasik dan ADL2-D yang peneliti usulkan dalam penelitian ini adalah tentang perwakilan (representasi) data. ADL klasik menggunakan representasi vektor, sedangkan ADL2-D bekerja dengan data dalam representasi matriks. Dalam penggunaan metode ADL2-D akan terlihat bahwa representasi mengarah ke eigen-dekomposisi pada matriks dengan ukuran lebih kecil. Lebih khusus, ADL2-D melibatkan eigen-dekomposisi matriks dengan ukuran  $r \times r$  dan  $c \times c$ , yang jauh lebih kecil daripada matriks ADL klasik (Ye *et. al*, 2005).

Dalam ADL2-D telah disepakati bahwa suatu himpunan gambar disimbolkan dengan  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$ . Dengan intuisi yang sama dengan ADL klasik, ADL2-D mencoba untuk mencari suatu transformasi bilinear

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{L}^T \mathbf{X}_i \mathbf{R} \quad (7)$$

sehingga kelas-kelas yang berbeda dipisahkan. Kuncinya adalah bagaimana memilih ruangbagian  $L$  dan  $R$  berdasarkan matriks sebaran dalam kelas dan antar kelas (Luo *et. al*, 2007).

Misalkan  $A_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah gambar (pola) dalam dataset, kemudian masing-masing pola dikelompokkan ke dalam  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$  dimana  $\Pi_i$  memiliki  $n_i$  gambar (pola). Misalkan  $M_i = \frac{1}{n_i} \sum_{x \in \Pi_i} X$  adalah rata-rata dari kelas

ke- $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , dan  $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} X$  berarti rata-rata keseluruhan. Dalam 2DLDA, peneliti menganggap gambar sebagai sinyal dua dimensi dan bertujuan untuk menemukan dua matriks transformasi  $L \in \mathbb{R}^{r \times l_1}$  dan  $R \in \mathbb{R}^{c \times l_2}$  yang memetakan setiap anggota  $A_i \in \mathbb{R}^{r \times c}$  untuk  $1 \leq i \leq n$ , ke suatu matriks  $B_i \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$  sehingga  $B_i = L^T A_i R$ .

Sama halnya seperti ADL klasik, ADL2D bertujuan untuk mencari transformasi (proyeksi) optimal  $L$  dan  $R$  sehingga struktur kelas dari ruang berdimensi tinggi yang asli diubah ke ruang berdimensi rendah. Suatu kesamaan metrik alami antara matriks adalah norma Frobenius (Ye, *et. al*, 2004). Kuadrat jarak dari *within-class* (dalam kelas) dan *between class* (antar kelas) dapat dihitung sebagai berikut:

$$D_w = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2, \quad D_b = \sum_{i=1}^k n_i \|M_i - M\|_F^2 \quad (8)$$

$\text{trace}(M M^T) = \|M\|_F^2$ , untuk suatu matriks  $M$ , maka diperoleh

$$D_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2 \right) \quad (9)$$

$$D_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} \|X - M_i\|_F^2 \right) \quad (10)$$

Dalam ruang berdimensi rendah, hasil dari transformasi linier  $L$  dan  $R$ , jarak *within-class* dan *between class* menjadi:

$$\bar{D}_w = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \Pi_i} L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right) \quad (11)$$

$$\bar{D}_b = \text{trace} \left( \sum_{i=1}^k n_i L^T (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T L \right) \quad (12)$$

Transformasi optimal  $L$  dan  $R$  akan memaksimumkan  $\bar{D}_b$  dan meminimumkan  $\bar{D}_w$ , oleh karena kesulitan menghitung optimal  $L$  dan  $R$  secara simultan, berikut ini adalah algoritma untuk ADL2D. Lebih khususnya, untuk suatu  $R$  tetap, kita dapat menghitung optimal  $L$  dengan memecahkan permasalahan optimisasi yang sama dengan persamaan (12). Dengan menghitung  $L$ , kita kemudian dapat memperbaharui  $R$  dengan memecahkan masalah optimisasi lain sebagai satu-satunya penyelesaian dalam persamaan (6).

### Perhitungan L

Untuk suatu  $R$  tetap,  $\bar{D}_w$  dan  $\bar{D}_b$  dapat ditulis kembali sebagai

$$\bar{D}_w = \text{trace} (L^T S_w^R L), \quad \bar{D}_b = \text{trace} (L^T S_b^R L) \quad (13)$$

di mana

$$S_w^R = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i) R R^T (X - M_i)^T, \quad S_b^R = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M) R R^T (M_i - M)^T \quad (14)$$

optimal  $L$  dapat dihitung dengan memecahkan masalah optimisasi berikut:  $\max_L \text{trace} ((L^T S_w^R L)^{-1} (L^T S_b^R L))$ . Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan memecahkan masalah generalisasi nilai eigen berikut:  $S_w^R x = \lambda S_b^R x$ . Karena  $S_w^R$  secara umum adalah nonsingular, maka  $L$  optimum dapat diperoleh dengan menghitung suatu eigen-dekomposisi pada  $(S_w^R)^{-1} S_b^R$ . Catatan bahwa ukuran dari matriks  $S_w^R$  dan  $S_b^R$  adalah  $r \times r$  (matriks bujursangkar), yang ukurannya lebih kecil dibandingkan ukuran matriks  $S_w$  dan  $S_b$  dalam ADL klasik.

## Perhitungan $R$

Kemudian menghitung  $R$  untuk suatu  $L$  yang tetap.  $\bar{D}_w$  dan  $\bar{D}_b$  dapat ditulis kembali sebagai

$$\bar{D}_w = \text{trace}(R^T S_w^L R), \bar{D}_b = \text{trace}(R^T S_b^L R) \quad (15)$$

di mana

$$S_w^L = \sum_{i=1}^k \sum_{X \in \Pi_i} (X - M_i)^T L L^T (X - M_i), S_b^L = \sum_{i=1}^k n_i (M_i - M)^T L L^T (M_i - M) \quad (16)$$

Optimal  $L$  dapat dihitung dengan memecahkan masalah optimisasi berikut:  $\max_R \text{trace}((R^T S_w^L R)^{-1} (R^T S_b^L R))$ . Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan memecahkan masalah generalisasi nilai eigen berikut:  $S_w^L x = \lambda S_b^L x$ . Karena  $S_w^L$  secara umum adalah nonsingular, maka  $R$  optimum dapat diperoleh dengan menghitung suatu eigen-dekomposisi pada  $(S_w^L)^{-1} S_b^L$ . Catatan bahwa ukuran dari matriks  $S_w^L$  dan  $S_b^L$  adalah  $r \times r$  (matriks bujursangkar).

### 2.3 Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris (ADL2-D Simetris)

Telah diutarakan pada bab sebelumnya bahwa pendekatan pengklasifikasian dengan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi (ADL2-D) menimbulkan masalah keraguan yang mendasar yaitu: Terdapat dua cara untuk mendefinisikan matriks sebaran dalam-kelas  $S_w$

$$S_w(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k \sum_{X_i \in \pi_j} (X_i - M_j)(X_i - M_j)^T$$

$$S_w(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in \pi_j} (X_i - M_j)^T (X_i - M_j)$$

dan terdapat dua cara untuk mendefinisikan matriks sebaran antar-kelas  $S_b$

$$S_b(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)(M_j - M)^T$$

$$S_b(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^k n_j (M_j - M)^T (M_j - M)$$

Oleh karena itu, dalam ruang transformasi dapat dituliskan

$$S_b(\mathbf{YY}^T), S_b(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

$$S_w(\mathbf{YY}^T), S_w(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}),$$

Pada umumnya, gambar tidak bersifat simetris:  $X_i \neq X_i^T$ , maka

$$S_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) \neq S_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}),$$

$$S_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) \neq S_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}),$$

Karena alasan ini, fungsi objektif ADL menjadi ambigu yakni menimbulkan sejumlah pilihan:

$$J_1 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}{S_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}$$

$$J_2 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}$$

$$J_3 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}{S_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)} + \frac{S_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})} \right]$$

$$J_4 = \text{tr} \left[ \frac{S_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})} \frac{S_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}{S_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)} \right],$$

$$J_5 = \text{tr} \frac{S_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) + S_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{S_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) + S_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})},$$

Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris dalam menyelesaikan masalah ambigu di atas, dimotivasi dengan suatu kunci pengamatan: jika gambar simetris, yakni  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^T$ , maka

$$S_w(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = S_w(\mathbf{X}^T\mathbf{X}),$$

$$S_b(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = S_b(\mathbf{X}^T\mathbf{X}).$$

Penyelesaian masalah ini menggunakan suatu representasi data baru yaitu transformasi bilinear simetris.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Pada Fukunaga(1990), matriks  $\mathbf{\Gamma}$  didefinisikan sebagai:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

yakni matriks yang diagonal utamanya merupakan nilai varians dari suatu data dan elemen yang lainnya 0.

Transformasi bilinear di atas ekuivalen dengan transformasi linier  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{L}^T \mathbf{X}_i \mathbf{R}$ . Penjabarannya yakni sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{X}_i^T & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^T \mathbf{X}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}^T \mathbf{X}_i^T \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{X}_i \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

diperoleh  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{L}^T \mathbf{X}_i \mathbf{R}$  dan  $\mathbf{Y}_i^T = \mathbf{R}^T \mathbf{X}_i^T \mathbf{L}$ . Kita juga memiliki

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X}_i^T \\ \mathbf{X}_i & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Y}_i^T & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^T \right\|^2 = 2 \|\mathbf{X}_i - \mathbf{L} \mathbf{Y}_i \mathbf{R}^T\|^2$$

Oleh karena itu, optimisasi menggunakan  $(\mathbf{L}, \mathbf{R})$  ekuivalen dengan optimisasi menggunakan  $\mathbf{\Gamma}$ .

Selain itu, dengan menggunakan transformasi bilinear simetris, dihasilkan suatu teorema:

**Teorema 1:** Fungsi objektif ADL tunggal untuk ADL2-D ialah

$$J_{ADL2-D} = \text{tr} \frac{\mathbf{S}_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}{\mathbf{S}_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)} = \text{tr} \frac{\mathbf{S}_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{\mathbf{S}_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})} \quad (17)$$

$$J_{ADL2-D} = \text{tr} \left( \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}} \right) \quad (18)$$

Dengan menggunakan teorema 1, dalam kasus matriks tidak simetris yang mengakibatkan  $\mathbf{S}_w$  dan  $\mathbf{S}_b$  dalam ruang  $X$  terdefinisi ganda juga mengakibatkan  $\mathbf{S}_w$  dan  $\mathbf{S}_b$  dalam ruang  $Y$  terdefinisi ganda. Sehingga

$$\begin{aligned}J'_1 &= \text{tr} \frac{\mathbf{S}_b(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)}{\mathbf{S}_w(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)} = \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}} \\ J'_2 &= \text{tr} \frac{\mathbf{S}_b(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})}{\mathbf{S}_w(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})} = \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}}\end{aligned}$$

Dalam pendekatan optimasi yang independen, untuk memperoleh  $R$  dapat dilakukan dengan cara memaksimumkan  $J'_1$  (tolak  $J'_2$ ) dan kemudian memperoleh  $L$  dengan cara memaksimumkan  $J'_2$  (tolak  $J'_1$ ). Hal tersebut tidak konsisten dalam mengoptimalkan fungsi objektif, yaitu ketika memaksimumkan  $J'_1, J'_2$  mengalami penurunan begitu juga sebaliknya. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan dua teknik yaitu pertama, ketika memaksimumkan  $J'_1$ , harus menghitung  $J'_2$ . Tetapi, di sisi lain juga perlu mengetahui bagaimana caranya



mengkombinasikan  $J_1'$  dan  $J_2'$ . Kombinasi sederhana yang dapat dilakukan yaitu  $J = J_1' + J_2'$  yaitu

$$J = \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{R} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{L}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{R} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{L}} \quad (19)$$

Cara yang kedua yaitu bagaimana mengoptimalkan fungsi objektif. Solusi untuk memaksimumkan  $\max_R J$  secara sederhana dapat dilakukan dengan menghitung vektor eigen dari  $\mathbf{S}_w^{-1} \mathbf{S}_b$ , perhitungan yang sama seperti metode Analisis Diskriminan Linier.

Namun, fungsi objektif yang telah dijabarkan pada persamaan (19), tidak dapat digunakan untuk menentukan *trace* dari suatu rasio tunggal dua matriks sebaran tersebut. Hal tersebut terjadi karena fungsi objektif tersebut tidak dapat diselesaikan secara searah melalui perhitungan eigenvektor (sama seperti ADL standar). Namun, hal tersebut dapat diatasi dengan mengembangkan suatu algoritma efisien dengan menggunakan pendekatan gradien-naik. Pendekatan ini menurunkan fungsi objektif. Turunan dari fungsi matriks dikerjakan dengan menggunakan aljabar matriks dasar yang terdapat dalam buku Fukunaga (1990). Hasilnya ditunjukkan dalam Lemma berikut:

**Lemma 2:** Anggap  $P_L = \mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}$ ,  $Q_L = \mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}$ ,  $P_R = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}$ . dan  $Q_R = \mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}$ .

Turunan fungsi objektif  $J_{ADL2-D}$  pada persamaan (3.2) yakni sebagai berikut

Untuk  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{R}}$  diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}} &= 2\mathbf{S}_b^L \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} - 2\mathbf{S}_w^L \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} \mathbf{P}_R \mathbf{Q}_R^{-1} \text{ dan} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}} &= 2 \sum_{k=1}^K \sum_{A_i \in \pi_k} (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k)^T \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k) \mathbf{R} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^K (\mathbf{M}_k - \mathbf{M})^T \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{P}_L \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{M}_k - \mathbf{M}) \mathbf{R} \end{aligned} \quad (20)$$

Untuk  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{L}}$  diperoleh  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{L}} \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{L}} = 2\mathbf{S}_b^R \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} - 2\mathbf{S}_w^R \mathbf{L} \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{P}_L \mathbf{Q}_L^{-1}$  dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{L}} \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{R}} &= 2 \sum_{k=1}^K \sum_{A_i \in \pi_k} (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k) \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} \mathbf{R}^T (\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_k)^T \mathbf{L} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^K (\mathbf{M}_k - \mathbf{M}) \mathbf{R} \mathbf{Q}_R^{-1} \mathbf{P}_R \mathbf{Q}_R^{-1} \mathbf{R}^T (\mathbf{M}_k - \mathbf{M})^T \mathbf{L} \end{aligned} \quad (21)$$

Dengan menggunakan rumus eksplisit gradien di atas, suatu algoritma dapat dikembangkan seperti algoritma 1 untuk mempermudah klasifikasi yang

diaplikasikan ke dalam visualisasi komputer, berikut ini algoritma efisien dengan menggunakan pendekatan gradien-naik.

**Algoritma 1** ADL2-D Simetris dengan menggunakan gradien

**Input**

- a) Sekumpulan gambar  $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n$  dan label dari masing-masing kelas
- b) Inisialisasi  $L_0, R_0$
- c) Frekuensi  $c$  untuk ortogonalisasi

**Inisialisasi**

- a)  $L \leftarrow L_0, R \leftarrow R_0$
- b) Hitung  $M_k, k = 1. 2. .... K$  dan  $M$   
 $M_k$  adalah rata-rata tiap kelas sedangkan  $M$  adalah rata-rata keseluruhan
- c)  $t \leftarrow 0$

**Lakukan**

Hitung  $S_w^R, S_w^L, S_b^R, S_b^L$

$$R \leftarrow R + \delta \frac{\partial J}{\partial R}$$

$$L \leftarrow L + \delta \frac{\partial J}{\partial L}$$

$$t \leftarrow t + 1$$

if (  $t \bmod c$  ) = 0

$$R \leftarrow \text{eigenvektor dari } (S_w^L)^{-1} S_b^L$$

$$L \leftarrow \text{eigenvektor dari } (S_w^R)^{-1} S_b^R$$

endif

**Output**  $L, R$

### 3. Aplikasi Penggunaan Metode Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris pada Suatu Contoh Pengenalan Pola Karakter

Untuk mempermudah pemahaman tentang Analisis Diskriminan Linier (ADL) dan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi (ADL2-D), peneliti menyajikan bagaimana pengenalan pola suatu karakter dengan menggunakan metode tersebut dan bagaimana perbandingannya satu sama lain. Berikut ini adalah contoh 2 karakter A dan B dengan masing-masing karakter A dan B terdapat dua pola

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| . | . | # | # | . | . |
| . | # | . | . | # | . |
| # | . | # | # | . | # |
| # | . | . | . | . | # |
| # | . | . | . | . | # |
| # | . | . | . | . | # |

A<sub>1</sub>

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| # | # | # | # | . | . |
| # | . | . | . | # | . |
| # | # | # | # | # | . |
| # | . | . | . | . | # |
| # | . | . | # | # | # |
| # | # | # | . | . | . |

A<sub>2</sub>

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| . | . | # | # | . | . |
| . | # | . | . | # | . |
| # | # | . | . | # | # |
| # | . | # | # | . | # |
| # | . | . | . | . | # |
| # | . | . | . | . | # |

A<sub>3</sub>

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| # | . | # | # | # | . |
| # | # | . | . | # | . |
| # | . | . | # | . | . |
| # | # | # | # | # | . |
| # | . | . | . | . | # |
| # | # | # | # | # | . |

A<sub>4</sub>

Masing-masing pola karakter di atas direpresentasikan ke dalam matriks berukuran  $6 \times 6 = 36$  elemen, kemudian matriks tersebut dipartisi menjadi 6 kelas,  $A_i = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_6\}$ .  $X_i = 0$  jika elemen yang direpresentasikan berupa titik dan  $X_i = 1$  jika elemen yang direpresentasikan berupa #, matriks representasinya seperti di bawah ini:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalam contoh karakter di atas, dapat dilihat bahwa karakter A<sub>1</sub> dan karakter A<sub>3</sub> merupakan karakter yang simetris, namun matriks representasi karakter tersebut bukanlah matriks yang simetris. Untuk proses pengenalan pola, kemudian masing-masing matriks representase karakter dipartisi menjadi 6 kelas yakni,

$$\mathbf{A}_{1\_kolom1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{1\_kolom2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{1\_kolom3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{1\_kolom4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{1\_kolom5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{1\_kolom6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dan seterusnya untuk matriks  $A_2$ ,  $A_3$  dan  $A_4$ , kemudian hitung masing-masing rata-ratanya.

Pada data berdimensi tinggi

Rata-rata dari masing kelas adalah

$$M_1 = 2,0554 \quad M_2 = 0,92913 \quad M_3 = 0,0726267 \quad M_4 = -0,18353$$

$$M_5 = -0,386473 \quad M_6 = 0,05336 \quad M_7 = -0,09873 \quad M_8 = -0,26914$$

$$M_9 = -0,07843$$

$$\text{Rata-rata seluruhnya } M = 0.2331296$$

### Metode Analisis Diskriminan Linier

Nilai eigen matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) di atas adalah

$$eigenvalue(S_w) = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7703 \\ 2.9668 \\ 3.9791 \\ 9.7286 \\ 13.1248 \\ 17.8440 \\ 30.8847 \\ 96.9425 \\ 603.0483 \end{pmatrix}$$

trace ( $S_w$ ) = 779.2891. Trace merupakan jumlah nilai eigen pada suatu matriks bujursangkar berukuran  $n \times n$  yang juga merupakan jumlah elemen-elemen diagonal matriks tersebut.

Nilai eigen matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) di atas adalah

$$eigenvalue(S_b) = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 73.1691 \end{pmatrix}$$

trace ( $S_b$ ) = jumlah elemen diagonal ( $S_b$ ) = 73.1691.

$$\begin{aligned} \text{Fungsi objektif optimum ADL} &= \frac{\text{tr}(S_b)}{\text{tr}(S_w)} \\ &= \frac{73.1691}{779.821} \\ &= 0.093828 \end{aligned}$$

#### 4. Kesimpulan

Masalah keraguan yang terdapat pada fungsi objektif Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi sebelumnya dapat diselesaikan dengan pendekatan Analisis Diskriminan Linier 2-Dimensi Simetris yang menghasilkan suatu fungsi objektif lengkap. Sebelum menemukan fungsi tersebut, ADL2-D Simetris mendefinisikan ADL2-D melalui rasio formulasi trase dengan matriks sebaran dalam-kelas ( $S_w$ ) dan matriks sebaran antar-kelas ( $S_b$ ) yang lengkap. Fungsi objektif lengkap tersebut ialah

$$J = \text{tr} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_b^R \mathbf{R}}{\mathbf{R}^T \mathbf{S}_w^R \mathbf{R}} + \text{tr} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_b^L \mathbf{L}}{\mathbf{L}^T \mathbf{S}_w^L \mathbf{L}}$$

Selain itu, suatu algoritma komputasional efektif diberikan untuk memecahkan fungsi objektif pada ADL2-D Simetris. Jika diaplikasikan pada suatu data berdimensi tinggi, akan terlihat bahwa ADL2-D Simetris memberikan hasil yang lebih baik dan akurat dibandingkan ADL2-D.

#### 5. Daftar Pustaka

- [1] Fukunaga, K. 1990. *Introduction to Statistical Pattern Classification*. San Diego, California, USA : Academic Press.
- [2] Horn, R. A. and Johnson, C. R. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge, U.K: Cambridge University Press.
- [3] Jain, Anil, K., Fellow, Duin, Robert, P.W., and Jianchang Mao, Jianchang,, Senior Member, IEEE. Statistical Pattern Recognition: A Review. In *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 1, Januari 2000.
- [4] Li, M. and Yuan, B. 2005. 2d-lda: A novel statistical linear discriminant analysis for image matrix. *Pattern Recognition Letters*, **26(5)**: hal. 527–532.
- [5] Luo, D., Ding, C., and Huang, H. 2007. *Symmetric Two Dimensional Linear Discriminant Analysis (2DLDA)*. University of Texas at Arlington Press.
- [6] Song, F., Liu, S., and Yang, J. 2005. Orthogonalized fisher discriminant. *Pattern Recognition*, **38(2)**: hal. 311–313.
- [7] Theodoridis, Sergios. and Koutroumbas, Kontantinos. 2003. *Pattern Recognition. 2<sup>nd</sup> Edition*. New York, USA: Academic Press.
- [8] Xiang, Zhang, Pan, Feng, Wang, Wei. 2008. Finding Local Linear Correlation in High Dimensional Data. *Correlation Linear*, **23(1)**: hal. 1259-1269.
- [9] Xiong, H., Swamy, M., and Ahmad, M. 2005. Two-dimensional fld for face recognition. *Pattern Recognition*, **38(7)**: hal. 1121–1124.

- [10] Yang, J., Frangi, F., and Zhang, D. 2003. Uncorrelated projection discriminant analysis and its application to face image feature extraction. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 17(8): hal. 1325–1347.
- [11] Ye, J., Janardan, R., and Li, Q. 2004. Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis.
- [12] *Advances in Neural Information Processing Systems* (NIPS 2004), **17**: hal. 1569–1576
- [13] Yu, Senhua., and Dasgupta, Dipankar. 2008. *Conserved Self Pattern Recognition Algorithm with Novel Detection Strategy Applied to Breast Cancer Diagnosis*. Memphis, USA: University of Memphis Press.
- [14] [http://www.wikipedia.org/html/pattern\\_recognition.htm](http://www.wikipedia.org/html/pattern_recognition.htm). Tanggal akses: 22 Februari 2010.